Campus de l'Université de Montréal
C.P. 6128, succursale Centre-ville
Montréal QC H3C 3J7 Canada

Telephone : (514) 343-7575
Télécopieur : (514) 343-7121

crt@crt.umontreal.ca
www.crt.umontreal.ca

CRT-2001-38

Centre de recherche sur les transports (C.R.T.)
Centre for Research on Transportation

REVUE DES INÉGALITÉS VALIDES PERTINENTES AUX PROBLÈMES DE CONCEPTION DE RÉSEAUX

par

Mervat Chouman
Teodor Gabriel Crainic
Bernard Gendron

Octobre 2001

PUBLICATION
CRT-2001-38

REVUE DES INÉGALITÉS VALIDES PERTINENTES AUX PROBLÈMES DE CONCEPTION DE RÉSEAUX *

par

Mervat Chouman[1,2]
Teodor Gabriel Crainic[1,3]
Bernard Gendron[1,2]

* Cette recherche a été rendue possible grâce en partie au Fonds pour la Formation de Chercheurs et l'Aide à la Recherche (FCAR), au Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) et au Réseau de Calcul et de Modélisation Mathématique (RCM2).

1 Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal, C.P. 6128, succursale Centre-ville, Montréal, Canada H3C 3J7 (mervat@crt.umontreal.ca, theo@crt.umontreal.ca, bernard@crt.umontreal.ca)

2 Département d'informatique et de recherche opérationnelle, Université de Montréal, C.P. 6128, succursale Centre-ville, Montréal, Canada H3C 3J7

3 Département de management et technologie, Université du Québec à Montréal, C.P. 6192, succursale Centre-ville, Montréal, Canada H3C 4R2

Dépôt légal – Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada, 2001

Résumé

L'objectif de cet article est de présenter une revue de la littérature portant sur les inégalités valides pertinentes au problème de conception de réseaux multiproduits avec coût fixe et capacité. Nous passons d'abord en revue les principaux travaux portant sur des méthodes de relaxations et des heuristiques. Nous constatons que ces méthodes seules ne sont pas suffisantes pour résoudre des exemplaires de grande taille du problème. Une combinaison de ces méthodes avec des approches polyédrales apparaît pourtant prometteuse. Par la suite, nous présentons trois grandes classes d'inégalités valides pertinentes au problème, qui ont été étudiées pour des problèmes apparentés. Nous présentons également des résultats expérimentaux utilisant les implantations générales de ces inégalités dans des logiciels sophistiqués. Ces résultats montrent clairement la nécessité d'entreprendre une étude approfondie des propriétés polyédrales du problème afin de résoudre efficacement des exemplaires de grande taille.

Mots-clés : Inégalités valides, conception de réseaux multiproduits avec capacité, propriétés polyédrales, méthodes de relaxations, heuristiques, méthodes polyédrales.

Abstract

The objective of this paper is to present a survey of relevant valid inequalities for the multicommodity capacitated fixed-charge network design problem. We present first a review of the relevant literature on relaxations and heuristic approaches. We observe that these approaches alone are not sufficient to solve large-scale instances of the problem. However, a combination of these approaches and polyhedral methods appears very promising. Then, we present three classes of relevant valid inequalities for the problem that have been studied for related problems. We present as well experimental results on the general implementations of some of these inequalities in state-of-the-art commercial software. These experiments point towards the necessity of profound polyhedral studies in order to solve efficiently large-scale instances of the problem.

Key words : Valid inequalities, multicommodity capacitated network design, polyhedral studies, relaxations, heuristic approaches, polyhedral methods.

1 Introduction

Les modèles de conception de réseaux sont largement utilisés pour représenter une grande variété d'applications dans différents domaines, notamment le transport, les télécommunications, la logistique et les systèmes de production-distribution (Magnanti et Wong 1984, Minoux 1989). Dans le domaine du transport, en particulier, les modèles de conception de réseaux couvrent la hiérarchie complète de la planification, que ce soit au niveau stratégique, tactique ou opérationnel (Crainic et Laporte 1997). Sommairement, le problème de conception de réseaux consiste à construire un réseau qui serait capable de gérer à un coût minimal la demande requise entre des paires origines-destinations. Dépendemment de l'application, afin de satisfaire la demande, la construction du réseau se fait soit en choisissant un sous-ensemble d'arcs (ou de noeuds) dans le graphe sous-jacent au réseau, soit en installant des capacités additionnelles sur les arcs. À chaque décision (choix ou installation) est associée un coût fixe.

Les modèles de conception de réseaux sont généralement représentés par des formulations de programmation linéaire en nombres entiers incluant des variables continues ("mixed integer programming", ou MIP) représentant ainsi à la fois les décisions de choix ou d'installation et le transport de la demande à travers le réseau. Ils sont NP-difficiles. De plus, outre leur caractère fortement combinatoire, ces modèles sont souvent de très grande taille. Dans la plupart des cas, ces modèles incluent également un flot à plusieurs types de produits et les arcs sont munis de capacités, augmentant ainsi le niveau de complexité du problème.

Typiquement, les modèles MIP sont résolus d'une manière exacte par des algorithmes de programmation linéaire (tel le simplexe) combinés avec des méthodes de séparation et évaluation progressive ("branch-and-bound", ou B&B). Toutefois, étant donné la complexité de ces modèles, seulement des instances de petite taille peuvent être résolues efficacement en un temps raisonnable. Étant donné que l'efficacité des méthodes de B&B repose sur la possibilité de générer efficacement des bornes de qualité sur la valeur optimale, les chercheurs se sont interessés aux méthodes polyédrales, qui permettent d'améliorer les bornes calculées par les algorithmes de programmation linéaire. La philosophie de ces méthodes est d'ajouter de l'information au modèle dans le but de l'améliorer. L'amélioration du modèle se traduit par l'ajout de contraintes linéaires (*inégalités valides*, ou IV) qui sont redondantes dans le modèle original, mais qui permettent d'améliorer les bornes obtenues à partir de ses relaxations.

La difficulté majeure de l'approche polyédrale réside dans l'identification des ensembles (ou familles) d'IV. À cette fin, une étude poussée des propriétés polyédrales du modèle est nécessaire. Au cours des vingt dernières années, plusieurs études polyédrales ont été effectuées sur des modèles difficiles connus dans la littérature, ainsi des résultats théoriques et des familles d'IV pour des problèmes spécifiques ont été proposés dans plusieurs articles. Par la suite, ces familles d'IV ont été utilisées pour développer des algorithmes

pour le problème initial. Elles ont été également adaptées pour d'autres formulations.

Le but principal de cet article est de présenter une revue de trois grandes familles d'IV proposées dans la littérature, et qui sont pertinentes au *problème de conception de réseaux multiproduits avec coût fixe et capacité* (ou PCC, que nous présentons à la section 2.1), une formulation qui permet de représenter un très grand nombre d'applications. Ainsi, plusieurs familles d'IV ont été étudiées pour des structures particulières que nous pouvons identifier à des relaxations du PCC. Par ailleurs, il y a eu plusieurs études polyédrales portant sur des problèmes de conception de réseaux apparentés au PCC. Plus précisement, nous traitons des problèmes de localisation et des problèmes d'installation sur les arcs, ou "network loading" (que nous présentons aux sections 2.3.1 et 2.3.2). De ces contributions, nous dégageons les trois grandes familles d'IV suivantes (que nous étudions à la section 4): les inégalités de couverture, les inégalités de couverture de flot et les inégalités basées sur des coupes. Mentionnons qu'à notre connaissance, aucune étude des propriétés polyédrales du PCC n'a été publiée à ce jour. Le présent article, qui se veut essentiellement une revue des propriétés polyédrales des modèles apparentés au PCC, constitue donc un premier jalon vers l'élaboration d'une étude plus détaillée des propriétés polyédrales du PCC.

Remarquons que la plupart des IV présentées dans cet article ont été incorporées dans des logiciels commerciaux de MIP. Dans ce contexte, il est naturel de se poser la question suivante: les implantations générales des IV en question, proposées par ces logiciels commerciaux, sont-elles suffisantes pour résoudre efficacement des exemplaires de grande taille du PCC ? Nous montrons par des résultats numériques obtenus avec un logiciel de MIP (CPLEX 2000) que les implantations générales des IV ne sont pas suffisantes pour résoudre des exemplaires de grande taille du PCC.

Cet article est organisé comme suit. Dans la section 2, nous présentons une formulation du PCC, les différentes méthodes utilisées pour résoudre ce problème et nous décrivons les cas particuliers pertinents à notre étude, soit les problèmes de localisation et les problèmes d'installation sur les arcs. La section 3 est consacrée à la présentation des approches polyédrales. Une revue des techniques utilisées pour la dérivation des IV, ainsi que des familles d'IV étudiées dans la littérature sont présentées à la section 4. Dans la section 5, nous montrons des résultats expérimentaux sur les implantations générales de certaines familles d'IV par le logiciel CPLEX. Nous terminons cet article par une conclusion qui soulève quelques questions importantes donnant naissance à des avenues de recherche.

2 Le problème de conception de réseaux multiproduits avec coût fixe et capacité (PCC)

Dans cette section, nous décrivons d'abord la formulation du PCC, puis nous présentons une revue de la littérature portant sur les méthodes de résolution pour le problème, et enfin nous présentons deux classes de modèles apparentés au PCC, soit les modèles de localisation et les modèles d'installation sur les arcs, pour lesquels plusieurs études portant sur les IV ont été publiées à ce jour.

2.1 Formulation du PCC

Le PCC est défini sur un graphe $G = (N, A)$, où N est l'ensemble des noeuds et A est l'ensemble des arcs, dans lequel circulent plusieurs produits. Pour simplifier la présentation, on considère que chaque produit correspond à une paire origine-destination. Dénotons P l'ensemble des produits, ou paires origine-destination. Pour chaque produit $p \in P$, les noeuds sont divisés en trois sous-ensembles: l'origine $O(p)$, la destination $D(p)$ et les noeuds de transfert $T(p)$. Entre l'origine $O(p)$ et la destination $D(p)$ circule une quantité $d^p > 0$, alors que chaque noeud de transfert $i \in T(p)$ reçoit et transmet la même quantité de flot.
À chaque arc $(i, j) \in A$ sont associées plusieurs quantités :

- u_{ij} : capacité globale sur la quantité de flot pouvant circuler sur l'arc;
- b_{ij}^p : capacité partielle sur la quantité de flot de produit p pouvant circuler sur l'arc (dans beaucoup d'applications, ces capacités sont redondantes, et on pose alors $b_{ij}^p = \min\{u_{ij}, d^p\}$);
- f_{ij} : coût fixe qui est encouru dès qu'un flot traverse l'arc;
- c_{ij}^p : coût de transport par unité de flot de produit p traversant l'arc.

Le problème consiste à satisfaire les demandes de tous les produits de façon à minimiser la somme des coûts de transport et des coûts fixes, tout en respectant les capacités. Nous introduisons deux types de variables afin de modéliser le problème :

- x_{ij}^p : des variables continues, qui représentent la quantité de flot de produit p circulant sur l'arc (i, j);
- y_{ij} : des variables binaires, qui représentent les décisions de conception pour chaque arc (i, j).

Le PCC est alors formulé comme suit (en introduisant la notation additionnelle $N^+(i) = \{j \in N/(i, j) \in A\}$ et $N^-(i) = \{j \in N/(j, i) \in A\}$:

$$\min \sum_{p \in P} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}^p x_{ij}^p + \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} y_{ij} \tag{1}$$

sujet à:

$$\sum_{j\in N^+(i)} x_{ij}^p - \sum_{j\in N^-(i)} x_{ji}^p = \begin{cases} d^p & \text{si } i = O(p) \\ -d & \text{si } i = D(p) \\ 0 & \text{si } i \in T(p) \end{cases} \quad \forall\, i \in N, \forall\, p \in P \tag{2}$$

$$\sum_{p\in P} x_{ij}^p \leq u_{ij} y_{ij} \quad \forall\, (i,j) \in A \tag{3}$$

$$x_{ij}^p \leq b_{ij}^p y_{ij} \quad \forall\, (i,j) \in A,\ \forall\, p \in P \tag{4}$$

$$x_{ij}^p \geq 0 \quad \forall\, (i,j) \in A,\ \forall\, p \in P \tag{5}$$

$$0 \leq y_{ij} \leq 1 \quad \forall (i,j) \in A \tag{6}$$

$$y_{ij} \quad \text{entier} \quad \forall\, (i,j) \in A \tag{7}$$

Les contraintes (3) et (4) sont identifiées comme étant les *contraintes liantes*, parce qu'elles lient entre elles les variables continues et les variables entières pour assurer que le flot soit nul sur l'arc (i,j) dans le cas où $y_{ij} = 0$, c'est-à-dire lorsque l'arc (i,j) n'est pas présent dans la structure du réseau. De plus, les contraintes (3) lient les produits entre eux, assurant que le flot de tous les produits sur chaque arc ne dépasse pas la capacité globale de l'arc. Notons que, dans le cas où les capacités partielles sont redondantes, les contraintes (4) sont inutiles, et peuvent donc être éliminées. Le modèle résultant est appelé *formulation faible*. Toutefois, à cause de la présence des variables binaires au sein des contraintes (4), ces dernières ne sont pas redondantes pour la relaxation linéaire, ce qui permet d'améliorer la qualité des bornes issues de la relaxation linéaire. Par conséquent, le modèle obtenu en conservant les contraintes (4) est appelé *formulation forte*.

Le PCC est NP-difficile (Krarup et Pruzan (1983) ont démontré que le problème de localisation sans capacité, qui représente un cas particulier du PCC, est un problème NP-difficile). Outre la complexité théorique prouvée, la difficulté à résoudre ce problème revient, en partie, à sa nature fortement combinatoire, alliée à la très grande taille des applications réelles. De plus, les contraintes (3) lient entre eux les produits, rendant ainsi le problème non décomposable par produit. Lorsque les capacités sont très contraignantes, une autre difficulté s'impose: l'approximation du modèle MIP par sa relaxation linéaire est généralement médiocre. Ceci est dû, en particulier, à la mauvaise représentation des liens entre les capacités et les coûts fixes dans l'objectif de la relaxation linéaire. De plus, le problème de multiflot à coût minimum avec contraintes additionnelles, obtenu de la relaxation linéaire, est généralement difficile à résoudre par des méthodes traditionnelles en programmation linéaire, particulièrement lorsque le nombre de produits est élevé: le problème devient extrêmement dégénéré, lors de l'application de la méthode du simplexe (Crainic, Frangioni, Gendron 2001). Étant donné la relative mauvaise qualité des bornes inférieures issues de la relaxation linéaire du problème avec capacité, les méthodes de résolution basées sur les relaxations linéaires, qui sont généralement très utilisées dans le cas des modèles MIP, ne sont plus intéressantes lorsqu'appliquées directement sur cette formulation. Pour cette raison, une amélioration de la formulation via l'ajout d'IV paraît importante pour résoudre le problème.

2.2 Méthodes de résolution pour le PCC

Avant de passer en revue les méthodes de résolution pour le PCC, il convient de souligner que le cas particulier du problème où il n'y a aucune capacité est beaucoup plus simple à résoudre. Dans le cas sans capacité, on peut définir les formulations faible et forte de la manière suivante. La formulation faible est obtenue en posant $u_{ij} = \sum_{p \in P} d^p$ et en éliminant les contraintes (4), alors que la formulation forte revient à poser $b^p_{ij} = d^p$ et à éliminer les contraintes (3). Le problème sans capacité (PCS) a généré quelques travaux portant sur le développement d'algorithmes efficaces de résolution (voir la bibliographie de Balakrishnan, Magnanti et Mirchandani 1997). Le succès de certains algorithmes est dû au fait que la relaxation linéaire forte du PCS fournit une bonne approximation du problème. Il a été prouvé théoriquement que le polytope de la relaxation linéaire possède la propriété de quasi intégralité (Hellstrand, Larsson et Migdalas 1992), dans le sens où chaque arête de l'enveloppe convexe des points entiers est aussi une arête du polytope lui-même. Cette propriété ne tient pas pour la formulation faible du problème.

Parmi les méthodes de résolution efficaces qui ont été développées pour le problème sans capacité, on retrouve la procédure duale-ascendante de Balakrishnan, Magnanti et Wong (1989), et l'heuristique lagrangienne proposée par Holmberg et Hellstrand (1998). La procédure de Balakrishnan, Magnanti et Wong (1989) est une généralisation de la procédure duale ascendante, DUALOC, conçue par Erlenkotter (1978) pour le problème de localisation sans capacité, que nous allons présenter dans la section suivante. Elle consiste à ajuster les valeurs des multiplicateurs dans le but d'augmenter la valeur de l'objectif du dual de la relaxation forte du problème. Holmberg et Hellstrand (1998) ont proposé de résoudre une relaxation lagrangienne (par rapport aux contraintes de conservation de flot (2)) avec une heuristique primale pour trouver une solution réalisable du problème. Les résultats expérimentaux dans les deux travaux ont démontré l'efficacité de ces deux méthodes à résoudre des problèmes de grande taille.

Avant 1990, peu de travaux ont porté sur le PCC. Tout d'abord, il semblait naturel d'adapter la procédure duale-ascendante de Balakrishnan, Magnanti et Wong (1989) pour résoudre le PCC, étant donné la qualité remarquable des résultats obtenus pour le problème sans capacité (1% à 4% de l'optimum sur des problèmes de grande taille). Toutefois, les auteurs mentionnent avoir obtenu des résultats beaucoup moins performants à cause de la faible qualité de l'approximation fournie par la relaxation continue, et ces efforts ont été abandonnés par la suite (voir la thèse de doctorat de Balakrishnan 1984).

À notre connaissance, le PCC n'a fait l'objet d'aucune étude polyédrale. Par contre, il y a eu dans la littérature des études polyédrales effectuées pour une structure particulière que nous pouvons trouver dans des relaxations du PCC. Cette structure est celle du noeud-seul, ou "single-node", qui a été principalement étudiée par Padberg, Van Roy et Wolsey (1985). Dans cette étude, les auteurs ont développé une famille d'IV (inégalité de couverture de flot, ou ICF, introduite à la section 4.3) pour la structure

du noeud-seul ayant des bornes supérieures sur les flots des arcs. Ensuite, l'ICF a été adaptée par Van Roy et Wolsey (1986a) pour une structure similaire à la première mais ayant en plus des bornes inférieures sur les flots. Par la suite, Wolsey (1989) a généralisé les inégalités trouvées dans les travaux cités précedemment en une seule grande famille, celle des inégalités sous-modulaires. Stallaert (2000) a utilisé les inégalités développées par Padberg, Van Roy et Wolsey (1985) pour résoudre des problèmes de PCC à un seul produit.

Dans le but d'améliorer la qualité des bornes inférieures sur l'objectif, plusieurs chercheurs ont tenté différentes relaxations lagrangiennes: Gendron et Crainic 1994, 1996, Holmberg et Yuan 2000, Gendron, Crainic et Frangioni 1998, et Crainic, Frangioni et Gendron 2001. Cependant, Gendron et Crainic (1994) ont démontré théoriquement que la plupart de ces relaxations fournissent la même borne, qui est égale à celle de la relaxation linéaire forte. En effet, les sous-problèmes obtenus des différentes relaxations lagrangiennes possèdent la propriété d'intégralité. Comme toutes les bornes sont théoriquement égales, la comparaison entre les différentes approches de relaxations se base donc sur l'efficacité expérimentale à résoudre les sous-problèmes, de même qu'à calculer des directions de modification dans le dual lagrangien.

Gendron, Crainic et Frangioni (1998) ont étudié comment se comparent les relaxations linéaires faible et forte, telles que résolues par un logiciel commercial de programmation linéaire, et différentes approches de relaxations lagrangiennes. De même, ils ont comparé la qualité de la solution réalisable obtenue par une heuristique lagrangienne avec celle obtenue avec une heuristique de recherche avec tabous conçue par Crainic, Gendreau et Farvolden (2000). Les résultats numériques ont confirmé la supériorité de la relaxation forte sur la relaxation faible, ainsi que la supériorité de la solution réalisable obtenue par la recherche avec tabous sur celle obtenue par l'heuristique lagrangienne de decomposition selon les ressources.

Étant donné la difficulté du problème avec capacité, plusieurs chercheurs ont tenté des approches heuristiques afin de trouver une solution réalisable de qualité fournissant ainsi une borne supérieure sur l'objectif. Crainic, Gendreau et Farvolden (2000) et Ghamlouche, Crainic et Gendreau (2001) ont proposé des méthodes de recherche avec tabous. Hernu (2001) a proposé une heuristique basée sur des méthodes de programmation mathématique. Les résultats numériques dans les trois travaux ont montré une performance relativement bonne pour les problèmes de taille moyenne. Pour les problèmes de grande taille, il est difficile d'évaluer les performances de ces heuristiques en raison du fait que les solutions optimales, ou même des bornes inférieures de qualité, ne sont pas connues pour ces problèmes.

2.3 Modèles apparentés au PCC

Plusieurs modèles apparentés au PCC ont été largement étudiés dans la littérature, notamment le problème de l'arbre sous-tendant minimal, le problème du plus court chemin et le problème de multiflot à coût minimum. D'autres cas apparentés au problème, plus difficiles que ceux qu'on vient de citer, ont généré beaucoup de travaux. Pour une revue complète et détaillée, voir Magnanti et Wong (1984), Minoux (1989), Ahuja *et al.* (1995), Nemhauser et Wolsey (1988), ainsi que la bibliographie de Balakrishnan, Magnanti et Mirchandani (1997). Nous présentons dans les prochaines sections deux classes de modèles apparentés : les problèmes de localisation et les problèmes d'installation sur les arcs ("network loading"). Nous nous intéressons particulièrement à ces deux classes parce qu'elles ont généré des études polyédrales, qui pourraient être exploitées pour résoudre le PCC.

2.3.1 Problèmes de localisation

Dans cette section, nous présentons des problèmes discrets de localisation simple à un niveau, ou "simple plant location problem". Nous nous intéressons précisément à ce type de problèmes parce qu'ils sont des cas particuliers du PCC. Ces problèmes consistent généralement à déterminer un sous-ensemble optimal de sites potentiels parmi un ensemble fini de sites pour l'installation de dépôts afin de satisfaire la demande des clients. L'objectif dans ce type de problèmes est de minimiser les coûts totaux de transport de produits et les coûts fixes reliés à l'installation des dépôts. La formulation d'un problème de localisation est définie sur un graphe $G = (N, A)$ où N est l'ensemble de noeuds et A est l'ensemble des arcs. Les noeuds dans le graphe représentent les sites potentiels possibles pour l'implantation des dépôts et les clients à servir. Donc, soient $I \subseteq N$ et $J \subseteq N$ les ensembles des noeuds qui représentent les clients et les sites respectivement(notons que $A \subseteq IXJ$).

Le modèle MIP de localisation multiproduits avec capacité, ou PLC, est le suivant:

$$\text{(PLC)} \qquad \min \quad \sum_{j \in N} f_j y_j + \sum_{p \in P} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}^p x_{ij}^p$$

sujet à:

$$x_{ij}^p \leq \min\{u_j, d_i^p\} y_j \quad \forall\, (i,j) \in A,\ \forall\, p \in P \tag{8}$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij}^p = d_i^p \quad \forall i \in I,\ \forall\, p \in P \tag{9}$$

$$\sum_{p \in P} \sum_{i \in I} x_{ij}^p \leq u_j y_j \quad \forall\, j \in J \tag{10}$$

$$y_j \in \{0,1\} \quad \forall\, j \in J \tag{11}$$

$$x_{ij}^p \geq 0 \quad \forall\, (i,j) \in A,\ \forall\, p \in P \tag{12}$$

où

- f_j: coût d'installation du dépôt j;

- u_j: la capacité du dépôt j;

- d_i^p: la demande du client i pour le produit p;

- y_j: variable de localisation liée au dépôt j ($y_j = 1$ si un dépôt est installé au site j et $y_j = 0$ sinon);

- x_{ij}^p: quantité de flot de produit p desservie par le dépôt j pour le client i.

Le modèle ainsi introduit représente la formulation forte du problème parce qu'il contient les contraintes redondantes (8). Dans le cas où ces contraintes sont éliminées, on obtient la formulation faible du problème. La différence entre les deu formulations est que la relaxation linéaire de la formulation forte donne une meilleure approximation que celle de la formulation faible.

On obtient le modèle de localisation sans capacité, PLS, dans le cas où

$$u_j \geq \sum_{p \in P} \sum_{i \in I} d_i^p \quad \forall\, j \in J.$$

Les contraintes (8) sont remplacées alors par les containtes:

$$x_{ij}^p \leq d_i^p y_j \quad \forall\, (i,j) \in A,\ \forall\, p \in P$$

et les contraintes (10) peuvent être éliminées parce qu'elles sont redondantes.

Le modèle de localisation est un cas particulier du modèle de conception de réseaux. Pour s'en convaincre, il suffit d'introduire une super origine S, fournissant au réseau la totalité de la demande et de la relier à chaque dépôt par un arc. Chaque arc de ce type est muni d'un coût fixe de conception égal à f_j, d'un coût de transport par unité de flot de produit p égal à $c_{ij}^p = 0$ et d'une capacité égale à u_j (bien sûr, dans le cas où les dépôts admettent des capacités). Bien que le problème de localisation soit un cas particulier du problème de conception de réseaux avec capacité, les travaux entrepris sur les deux problèmes sont encore bien souvent peu reliés. Cela est dû surtout à la structure spéciale du premier: pour un ensemble fixe de dépôts choisi, le problème devient un problème de transport.

Les problèmes de localisation ont généré énormément de travaux depuis bien des années. Les articles de Krarup et Pruzan 1983, Cornuéjols, Nemhauser et Wolsey 1990, Cornuéjols, Sridharan et Thizy 1991, Conn et Cornuéjols 1990 ainsi que le livre de Mirchandani et Francis 1990 mettent en évidence l'ampleur et la diversité des travaux entrepris pour résoudre ces problèmes. Des algorithmes de résolution très efficaces ont été conçus pour les problèmes de localisation sans capacité. Mentionnons principalement la procédure duale-ascendante, DUALOC, conçue par Erlenkotter en 1978, et qui est similaire à celle utilisée par Bilde et Krarup (1977). DUALOC consiste principalement à approximer la valeur optimale du dual de la relaxation forte du problème, tout en générant des solutions réalisables de qualité. Le succès de cette procédure revient à ce que la relaxation

forte fournit une bonne approximation. Même pour les instances où cette propriété ne tient pas, Conn et Cornuéjols (1990) montrent comment réduire le gap en utilisant des IV.

Malheureusement, pour les problèmes avec capacité, la relaxation forte ne fournit plus une aussi bonne approximation. Dans le but d'améliorer la formulation du problème de localisation avec capacité, plusieurs chercheurs ont étudié les propriétés polyédrales du problème afin de générer des inégalités valides (Leung et Magnanti 1989 et Aardal, Pochet et Wolsey 1995). Les IV étudiées sont principalement des généralisations et des adaptations de l'inégalité de couverture de flot, que nous présentons à la section 4.3. Aardal, dans son article de 1998, explique comment traiter les inégalités valides trouvées avec l'approche des méthodes de coupes, que nous décrivons à la section 3.

2.3.2 Problèmes d'installation sur les arcs

Les problèmes d'installation sur les arcs, ou PIA, consistent à satisfaire à un coût minimal une certaine demande de plusieurs types de produits. Pour satisfaire la demande, on a la possibilité d'installer des capacités de plusieurs types sur les arcs. Soit $L = \{1, 2, .., |L|\}$ l'ensemble de types de capacités qu'on peut installer et soit C_l la capacité de chaque type $l \in L$. On suppose que les C_l sont des entiers tels que

$$C_1 < C_2 < C_3 < \cdots < C_{|L|} = C_{max}.$$

Chaque type de capacité admet un coût d'installation par arc (i, j) dénoté f_{ij}^l. Supposons que $f_{ij}^l > f_{ij}^q$ si $l > q$ et que

$$\frac{f_{ij}^1}{C_1} \geq \frac{f_{ij}^2}{C_2} \geq \frac{f_{ij}^3}{C_3} \geq \cdots \geq \frac{f_{ij}^{|L|}}{C_{|L|}} \quad , \ \forall (i,j) \in A.$$

Supposons de plus que les coûts de transport par unité de flot sont nuls sur tous les arcs. Dans le cas contraire, on pourra les ajouter facilement à l'objectif du modèle.

Le PIA, s'énonce alors comme suit :

$$\begin{array}{lll} \text{(PIA)} & \min & \sum_{l \in L} \sum_{(i,j) \in A} \ f_{ij}^l \ y_{ij}^l \\ & \text{sujet à:} & \\ & & (2), (5) \\ & & \sum_{p \in P} x_{ij}^p \leq \sum_{l \in L} C_l y_{ij}^l \ \ \forall \, (i,j) \in A \\ & & y_{ij}^l \in \mathbf{N} \ \ \forall \, (i,j) \in A, \ \forall \, l \in L \end{array}$$

Le PIA est un cas particulier du PCC. Pour s'en convaincre, il suffit d'introduire pour chaque arc (i, j) $\sum_{l \in L} \lceil \frac{\sum_{p \in P} d^p}{C_l} \rceil$ arcs parallèles correspondant au flot maximum pouvant être desservi par chacun des L types de capacités disponibles. À chaque arc $(i, j)^{lk}$, introduit pour le type l et pour $k \in \{1, .., \lceil \frac{\sum_{p \in P} d^p}{C_l} \rceil\}$, sont associés un cout fixe $k \times f_{ij}^l$, une capacité C^l et P variables continues $(x_{ij}^p)^{lk}$ représentant le flot de produit p circulant

sur l'arc $(i,j)^{lk}$. Le PIA est extrêmement difficile à résoudre. Magnanti et Mirchandani (1993) ont démonté que le PIA ayant un seul type de capacité est un problème NP-difficile et ce, même dans le cas où on dispose d'une seule origine pour tous les produits.

La manière la plus naturelle de traiter ce problème serait de résoudre sa relaxation continue. Cependant, il a été démontré théoriquement (Epstein 1998) et expérimentalement (Magnanti, Mirchandani et Vachani 1995) que la relaxation linéaire ne fournit pas une bonne approximation du problème. Ce qui a amené les chercheurs à améliorer la formulation du problème en lui ajoutant des inégalités valides. Afin d'étudier les propriétés polyédrales du problème pour pouvoir générer des inégalités valides, les chercheurs ont travaillé sur des versions simplifiées du problème. La plupart des problèmes étudiés étaient soit à un seul type de capacité ($|L| = 1$), soit à plusieurs types de capacité qui sont des entiers multiples d'une certaine modularité (C_{l+1} est un entier multiple de $C_l, \forall l \in L$). Magnanti et Mirchandani (1993) ont étudié le problème avec un seul type de produit et au plus trois types différents de capacités. Chopra, Gilboa et Sastry (1998) ont dérivé de nouvelles inégaliés pour le problème à un seul produit et deux types de capacités. Magnanti, Mirchandani et Vachani (1993, 1995) ont étudié le problème multi-produits avec deux types de capacités. Les inégalités valides trouvées pour ce problème vont être présentées dans les prochaines sections. Ces inégalités ont été généralisées par la suite par Bienstock et Günlük (1996) et incorporées dans une méthodologie de résolution par Günlük (1999) pour le même problème mais avec l'existence d'une certaine distribution initiale de capacité sur les arcs, des demandes directionnelles et des coûts de transport. Barahona (1996) montre comment utiliser les IV sur des relaxations du problème PIA multiproduits avec un seul type de capacité. Gabrel, Knippel et Minoux (1999) ont utilisé des IV (les inégalités de coupes qui sont présentées à la section 4.4) dans l'esprit d'une méthode de décomposition de Benders (Benders 1962) pour résoudre d'une manière exacte une généralisation du PIA. Le problème étudié admet toujours la possibilité d'installer différents types de capacités , le coût d'installation sur chaque arc étant donné par une fonction en escalier discontinue croissante.

Récemment, il y a eu des études polyédrales effectuées sur des problèmes plus généraux de PIA comme le travail de Bienstock et Muratore (2000) sur le problème avec des contraintes de fiabilité (ce sont des contraintes supplémentaires utilisées pour s'assurer que la demande va être satisfaite dans le cas où certains liens sont coupés dans le réseau construit), ou encore, le travail d'Atamtürk (2000) sur le problème multiproduits sans restriction sur les capacités.

3 Approches polyédrales

Considérons un modèle de programmation linéaire en nombres entiers. Nous savons qu'une solution optimale à ce modèle est un point extrême de l'enveloppe convexe du domaine réalisable (Nemhauser et Wolsey 1988). Si nous connaissions une description linéaire explicite de l'enveloppe convexe du domaine réalisable, le problème serait résolu

facilement par un algorithme de programmation linéaire en variables continues. La description linéaire explicite de l'enveloppe convexe se fait par l'identification des contraintes linéaires qui définissent toutes les facettes du domaine réalisable. Cependant, le problème d'identification de toutes les facettes de l'enveloppe convexe est généralement au moins aussi difficile à résoudre que le modèle en nombres entiers lui-même.

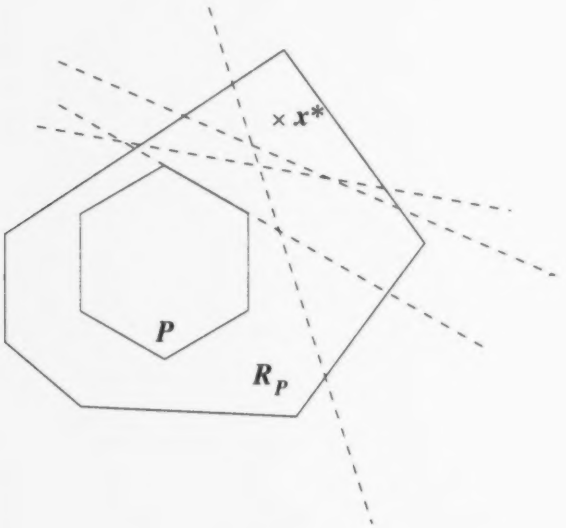

Figure 1: L'enveloppe convexe P et une relaxation R_P.

La philosophie générale des approches polyédrales est d'améliorer la formulation du problème par l'ajout d'IV. À cette fin, nous distinguons deux approches : une approche théorique et une autre algorithmique. L'objectif principal de l'approche théorique consiste à identifier des familles d'IV linéaires qui définissent idéalement des facettes ou des faces de dimension élevée de l'enveloppe convexe du domaine réalisable. Cette approche est basée sur une étude approfondie des propriétés polyédrales du problème à résoudre. Après l'identification théorique des familles d'IV vient le problème de la génération de ces IV et de leur ajout au modèle. Généralement, le nombre de telles IV est énorme, voire d'ordre exponentiel. Par conséquent, il serait impossible d'ajouter explicitement toutes les IV au modèle, autant pour le temps nécessaire à cette tâche que pour la taille du modèle résultant. En plus, plusieurs inégalités ne sont d'aucun secours dans le modèle parce qu'elles sont soit dominées par d'autres et donc redondantes, soit de dimension plus faible qu'une facette de l'enveloppe convexe. L'approche algorithmique consiste donc à résoudre une relaxation du problème, R_P, et si la solution obtenue, x^*, n'est pas réalisable pour le problème original, à générer et à ajouter au modèle un sous-ensemble d'IV violées par la solution courante du problème relaxé. La figure 1 illustre cette situation ; ici, P représente l'enveloppe convexe des points entiers, alors que R_P est le domaine décrit par la relaxation. La solution optimale, x^*, est coupée de l'enveloppe convexe par plusieurs IV, représentées par les droites pointillées. Parmi celles-ci, la plus forte correspond à une

facette de l'enveloppe convexe. Les IV ainsi ajoutées au modèle peuvent être utilisées soit dans le cadre d'une méthode de coupes, soit dans le cadre d'une méthode de relaxation lagrangienne. Dans le premier cas, on ajoute les IV à la formulation du problème et on résoud sa relaxation linéaire par le simplexe. Dans le deuxième cas, on va plutôt relaxer les IV trouvées en les introduisant dans l'objectif avec des termes de pénalités.

Le problème d'identifier, parmi une famille d'IV, une qui soit violée par un point x^*, s'appelle le problème de séparation. En fait, étant donné une solution optimale x^* (non réalisable) d'une relaxation du modèle MIP, la résolution du problème de séparation consiste à générer au moins une IV qui n'est pas satisfaite par x^*, si une telle IV existe parmi les familles d'IV considérées. L'ajout d'IV à la formulation du problème relaxé sert à séparer la solution courante du domaine réalisable. La difficulté majeure de l'approche algorithmique est que le problème de séparation ne se résoud en temps polynômial que si le problème de programmation linéaire, ayant comme contraintes les familles d'IV considérées, se résoud lui-même en temps polynômial (Nemhauser et Wolsey 1988). Pour contourner la difficulté du problème de séparation pour certaines familles d'IV, les chercheurs utilisent des heuristiques à la place des méthodes de résolution exacte, la conséquence étant qu'on peut ne pas identifier certaines IV violées par le point courant.

La force des approches polyédrales vis-à-vis des problèmes difficiles réside dans le fait qu'une famille d'IV pour une relaxation du problème constitue une famille d'IV pour le problème lui-même. Cette propriété importante motive les études et les travaux sur les propriétés polyédrales des problèmes qui ont des structures simples, mais qui constituent des relaxations des problèmes très complexes. Bien sûr, les IV étudiées ne définissent pas nécessairement des facettes ou des faces de dimensions élevées du problème original. Dans ce cas, la technique d'élévation séquentielle (ou "lifting" présentée dans la prochaine section), bien qu'elle soit difficile à appliquer, peut être utilisée pour augmenter la dimension de telles inégalités.

Afin de tirer plus d'avantages des méthodes polyédrales et pour développer des algorithmes de résolution efficaces, ces méthodes sont souvent combinées avec des méthodes de type énumératif comme le B&B. Si la génération de coupes se fait juste au niveau de la racine de l'arbre d'énumération alors nous parlons de l'algorithme de Cut-and-Branch (ou C&B). Par contre, si la génération des coupes se fait au niveau de chaque noeud de l'arbre alors nous parlons du Branch-and-Cut (ou B&C). Cette méthodologie a été présentée pour la première fois par Padberg et Rinaldi (1987). Bien que l'efficacité de cette approche ait été prouvée à maintes reprises (voir la bibliographie de Caprara et Fischetti 1997), ses performances dépendent grandement d'un compromis judicieux entre l'effort de calcul à chaque noeud de l'arbre d'énumération et la taille de l'arbre.

4 Revue des inégalités valides pertinentes au PCC

Dans cette section, nous présentons trois grandes familles d'IV pertinentes au problème de conception de réseaux: les inégalités de couverture (ou "cover inequalities"), les inégalités de couverture de flot (ou "flow cover inequalities") et des inégalités basées sur les coupes. Afin de bien comprendre les inégalités présentées, des techniques de base utilisées dans la dérivation des IV, ainsi que quelques définitions sont rappelées au début de la section.

4.1 Techniques de base

À l'origine, les études des propriétés polyédrales ont porté sur des problèmes de programmation en nombres entiers seulement; définissons les ensembles $P = \{x \in Z_+^n : Ax \leq b\}$ et $R_P = \{x \in R_+^n : Ax \leq b\}$ (la relaxation continue de P).

Technique de combinaison linéaire: L'idée de base est simple. Si un ensemble de contraintes est valide pour R_P, alors toute combinaison linéaire non-négative de ces contraintes est valide pour R_P. Comme $Ax \leq b$ est valide pour R_P alors

$$uAx \leq ub \tag{13}$$

est encore valide pour R_P pour tout $u \geq 0$. Comme $P \subset R_P$ les inégalités (13) sont valides pour P.

Cette technique n'est pas suffisante pour générer des inégalités qui soient valides pour P mais non pour R_P. Pour ce faire, il faut utiliser la propriété d'intégralité de P.

Technique d'arrondissement: Cette technique est basée sur un principe très simple: si $a \leq b$ et a est entier alors $a \leq \lfloor b \rfloor$, où $\lfloor b \rfloor$ est le plus grand entier plus petit que b.

En utilisant les techniques que nous venons de présenter, nous pouvons facilement comprendre et démontrer la validité des coupes de Gomory (1958) bien connues en programmation en nombres entiers. Ces coupes sont conçues pour des problèmes ayant des domaines réalisables bornés ainsi que des coefficients entiers dans A et b. La coupe de Gomory est définie sur le modèle standard obtenu de l'original en introduisant les variables d'écarts $(x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m})$. Donc, soit $P^e = \{x \in \mathbf{Z}_+^{n+m} : (A, I)x = b\}$ la formulation standard du problème. Soit $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m\}$ un vecteur de poids. On sait que $\lambda(A, I)x = \lambda b$ est valide pour P^e, alors la coupe de Gomory définie par:

$$\sum_{j \in N} (\bar{a}_j - \lfloor \bar{a}_j \rfloor) x_j + \sum_{i \in M} (\lambda_i - \lfloor \lambda_i \rfloor) x_{n+i} \geq \bar{b} - \lfloor \bar{b} \rfloor$$

est valide pour P^e, où $\lambda a_j = \bar{a}_j, \forall j \in N$ et $\lambda b = \bar{b}$.

Chvátal (1973), après avoir développé la technique d'arrondissement, a généralisé la coupe de Gomory pour traiter les cas où les coefficients de A et b sont des nombres

réels. L'inégalité obtenue est connue sous le nom d'inégalité de Chvátal-Gomory. Elle est définie par:

$$\sum_{j \in N} \lfloor u a_j \rfloor x_j \leq \lfloor u b \rfloor, \quad \forall u \geq 0$$

Schrijver (1980) a généralisé l'inégalité de Chvátal-Gomory pour traiter les cas où les coefficients de A et b sont des nombres rationnels et le domaine réalisable n'est pas nécessairement borné.

Technique d'élévation séquentielle (ou "lifting"): Cette technique est utilisée pour augmenter la dimension d'une face (IV) de P en essayant d'impliquer dans l'inégalité toutes les variables possibles. L'idée de l'élévation séquentielle est introduite initialement par Gomory (1969) et étudiée expérimentalement par Padberg (1973). Ensuite, plusieurs chercheurs ont généralisé cette approche: Wolsey (1976), Zemel (1978) et Balas et Zemel (1984). Bien que cette approche soit très importante et indispensable pour la qualité de certaines IV connues, elle est très coûteuse et même, dans certains cas, très compliquée à mettre en oeuvre. En effet, l'implication des variables qui ne figurent pas dans l'IV se fait d'une façon itérative. Les variables sont traitées séquentiellement dans un certain ordre. Nous présentons dans les propositions 1 et 2 deux approches différentes d'élévation tirées de Nemhauser et Wolsey (1988) pour calculer les coefficients d'élévation nommés α_1 et γ_1.

Proposition 1: Soit $P \subset \{0,1\}^n$ et $P^\delta = P \cap \{x \in \{0,1\}^n : x_1 = \delta\}$ pour $\delta = \{0,1\}$ et soit

$$\sum_{j=2}^{n} \pi_j x_j \leq \pi_0 \tag{14}$$

une IV de P^0, alors

- si $P^1 = \phi$, alors $x_1 \leq 0$ est une IV pour P;
- si $P^1 \neq \phi$. Soit $\zeta = \max\{\sum_{j=2}^{n} \pi_j x_j : x \in P^1\}$, alors

$$\alpha_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n} \pi_j x_j \leq \pi_0 \tag{15}$$

est une IV pour P pour tout $\alpha_1 \leq \pi_0 - \zeta$.

En plus, si $\alpha_1 = \pi_0 - \zeta$ et (14) est une face de dimension k de conv(P^0) alors (15) est une face de dimension $(k+1)$ de conv(P).

Proposition 2: Soit $P \subset \{0,1\}^n$ et $P^\delta = P \cap \{x \in \{0,1\}^n : x_1 = \delta\}$ pour $\delta = \{0,1\}$ et soit

$$\sum_{j=2}^{n} \pi_j x_j \leq \pi_0 \tag{16}$$

une IV de P^1, alors

- si $P^0 = \phi$, alors $x_1 \geq 1$ est une IV pour P;
- si $P^0 \neq \phi$. Soit $\zeta = \max\{\sum_{j=2}^{n} \pi_j x_j : x \in P^0\}$, alors

$$\gamma_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n} \pi_j x_j \leq \pi_0 + \gamma_1 \tag{17}$$

est une IV pour P pour tout $\gamma_1 \geq \zeta - \pi_0$.

En plus, si $\gamma_1 = \zeta - \pi_0$ et (16) est une face de dimension k de conv(P^1) alors (17) est une face de dimension $(k+1)$ de conv(P).

La difficulté majeure de cette approche est que le calcul de chaque coefficient d'élévation recquiert la résolution d'un problème d'optimisation différent, entier ou MIP dépendemment de l'IV. Ce dernier correspond au problème de maximisation pour calculer la valeur ζ. Dans la plupart des cas, ces problèmes sont extrêmement difficiles à résoudre, ce qui nous oblige à utiliser des heuristiques et des méthodes de relaxation. En plus, l'ordre dans lequel les variables sont traitées affecte énormément la qualité de la coupe obtenue. Un moyen d'alléger l'effort demandé pour faire l'élévation serait d'utiliser la technique d'élévation séquentielle indépendante (Wolsey 1977). Cette dernière est basée sur le principe suivant: si la fonction d'élévation, f, est superadditive (f bornée sur X et $f(x_1) + f(x_2) \leq f(x_1 + x_2), \forall x_1, x_2, x_1 + x_2 \in X$) alors l'élévation peut se faire en résolvant un seul problème d'optimisation pour calculer tous les coefficients de l'élévation. Bien que cette théorie soit intéressante, le problème est que la plupart des fonctions d'élévations rencontrées en pratique n'ont pas la propriété de superadditivité. Pour contourner cet obstacle, les auteurs utilisent des fonctions superadditives qui dominent la fonction d'élévation, ainsi ils peuvent calculer des coefficients d'élévations, plus ou moins exacts, sans beaucoup d'effort.

Des familles importantes d'IV connues dans la littérature sont basées sur le principe d'une couverture de flot. Pour la présentation de ces familles, nous allons introduire quelques définitions. Soit $P = \{x \in \{0,1\}^n : \sum_{j \in N} a_j x_j \leq b\}$ et $N = \{1, 2, .., n\}$.

Définition 1: Un sous-ensemble $C \subset N$ représente une couverture de P si

$$\sum_{j \in C} a_j > b.$$

Définition 2: Une couverture C de P est minimale si

$$\sum_{j \in C \setminus \{k\}} a_j < b \quad , \forall\, k \in C.$$

4.2 Inégalités de couverture

Les inégalités de couverture ont été développées pour le problème du sac alpin qui consiste à déterminer un sous-ensemble d'objets optimal parmi un ensemble fini d'objets de

telle sorte que le poids total des objets choisis ne dépasse pas une certaine capacité d. La figure 2 montre la structure induite par ce problème, où le domaine réalisable est donné par $P = \{y \in \{0,1\}^n : \sum_{j \in N} u_j y_j \leq d\}$ et $N = \{1, 2, .., n\}$.

proposition 3: (Wolsey 1975) pour toute couverture C de P, l'inégalité

$$\text{(IC)} \qquad \sum_{j \in C} y_j \leq |C| - 1 \tag{18}$$

est une IV de P.

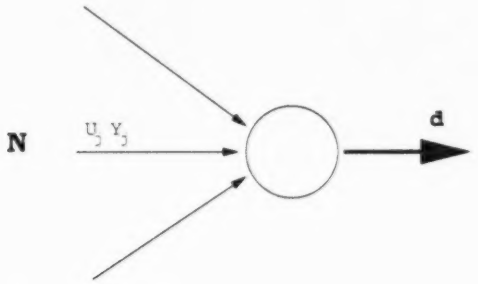

Figure 2: Structure induite pour le sac alpin.

La démonstration de la validité de (18) est très simple. En effet, si $y_j = 1, \forall j \in C$ alors la solution serait non-réalisable puisqu'on dépasse la capacité du sac d. De plus, si C est une couverture minimale telle que $C = N$ alors l'inégalité de couverture (18), ou (IC), représente une facette de $conv(P)$ (Nemhauser et Wolsey 1988). Mais dans le cas où $C \subset N$, l'IC ne représente pas, généralement, une face de dimension élevée de conv(P). Par contre, elle peut être considérablement renforcée par l'application de la technique d'élévation séquentielle. Ainsi, Padberg, Van Roy et Wolsey (1985) ont développé ce qu'on appelle l'inégalité de couverture élevée (ICE) introduite dans la proposition 4.

Corollaire 1: Si $C \subset N$ est une couverture minimale de P et si le couple (C_1, C_2) forme une partition quelconque de C telle que $C_1 \neq \phi$ alors

$$\text{(IC)} \qquad \sum_{j \in C_1} y_j \leq |C_1| - 1 \tag{19}$$

représente une facette de $conv(P(C_1, C_2))$, où
$P(C_1, C_2) = P \cap \{y \in \{0,1\}^n : y_j = 0,\ \forall j \in N \backslash C, y_j = 1\ \forall\ j \in C_2\}$.

Proposition 4: Si $C \subset N$ est une couverture minimale de P et si le couple (C_1, C_2) forme une partition quelconque de C telle que $C_1 \neq \phi$ alors il existe $\alpha_j \geq 0, \forall j \in N \backslash C$ et $\gamma_j \geq 0, \forall j \in C_2$ tels que l'inégalité

$$\text{(ICE)} \quad \sum_{j \in N \backslash C} \alpha_j y_j + \sum_{j \in C_2} \gamma_j y_j + \sum_{j \in C_1} y_j \leq |C_1| - 1 + \sum_{j \in C_2} \gamma_j \tag{20}$$

représente une facette de $conv(P)$.

La démonstration de la validité de l'inégalité (20) se fait en commençant par l'inégalité (19) et en appliquant la technique d'élévation séquentielle (on applique la Proposition 1 pour tout $j \in N \backslash C$ et la Proposition 2 pour tout $j \in C_2$).

Wolsey (1989) a développé des IV de type sac alpin pour le même problème mais avec des contraintes additionnelles de type

$$\sum_{j \in S_i} y_j \leq l \ , \text{ pour } i \in I \subset N.$$

Les contraintes additionnelles peuvent être vues comme des contraintes budgétaires dans un problème de conception de réseaux.

L'utilisation de ce type d'IV, comme tout autre type, nécessite la résolution de deux problèmes majeurs: le problème de séparation et le problème d'élévation séquentielle.

4.2.1 Problème de séparation

Étant donné une solution optimale non-entière y^* d'une relaxation du problème P, le problème de séparation pour l'IC revient à générer une couverture minimale C, de telle sorte que

$$\sum_{j \in C} y_j^* \quad > \quad |C| - 1$$

À cette fin, introduisons les variables binaires $z_j, j \in N$, où $z_j = 1$ signifie que $j \in C$. Alors, le problème de séparation consiste à résoudre le problème de sac alpin en variables 0-1 suivant:

$$(SepIC) \qquad \begin{array}{lll} Z_{sep} = & \min & \sum_{j \in N}(1 - y_j^*) z_j \\ & \text{sujet à} & \\ & & \sum_{j \in N} u_j z_j \ > \ d \\ & & z_j = 0 \text{ ou } 1 \ , \forall j \in N \end{array}$$

Soit Z_{sep}^* la valeur de l'objectif à l'optimum. Deux cas se présentent:

- si $Z_{sep}^* < 1$, alors nous avons réussi à générer une IC violée par la solution y^*,
- si $Z_{sep}^* \geq 1$, alors la solution y^* ne viole aucune inégalité de couverture.

Vu que le problème (SepIC) est un problème NP-difficile (sac alpin en variables 0-1), les chercheurs utilisent des heuristiques pour le résoudre. Deux conséquences directes découlent de la résolution non-exacte du problème:

- Les couvertures générées ne donnent pas les ICs les plus violées par la solution courante, ce qui affecte la qualité (facette ou non) de l'IC.
- Nous pouvons manquer la génération d'une IC violée même lorsqu'elle existe.

L'élévation séquentielle joue un rôle très important dans ces cas. En premier lieu, elle renforce l'inégalité générée en augmentant la dimension de la face par l'ajout des variables qui ne figurent pas dans l'inégalité; et, en deuxième lieu, même si l'inégalité générée n'est pas violée, il y a une chance qu'elle le soit après l'élévation.

4.2.2 Élévation séquentielle

L'application de la technique d'élévation séquentielle sur l'IC est une tâche difficile. En effet, nous savons que les variables doivent être traitées séquentiellement pour calculer les coefficients α_j et γ_j de l'inégalité (20). Le calcul de chaque coefficient requiert la résolution d'un problème de sac alpin en variables 0-1, donc en totalité il faut résoudre $|N \backslash C_1|$ problèmes. En plus, l'ordre dans lequel les variables sont traitées affecte énormément les valeurs des coefficients, par conséquent la qualité de la coupe. Nous savons que les variables dans $N \backslash C$ doivent être élevées avant celles dans C_2, car ces variables contribuent à la violation de la contrainte et que les variables traitées en premier auront des coefficients d'élévation plus grands. Cependant, nous n'avons aucune idée sur le meilleur ordre dans lequel nous devons traiter les variables de C_2 et de $N \backslash C$. En effet, Gu, Nemhauser et Savelsbergh (1999) ont démontré que, étant donné une couverture minimale, le problème qui consiste à identifier l'ordre des variables à élever qui donne l'ICE la plus violée (la meilleure) est un problème NP-complet. Normalement, les variables fractionnaires doivent être élevées en premier parce qu'elles contribuent à la violation de lIV, ensuite les variables qui sont à leur borne supérieure et à la fin celles qui sont à leur borne inférieure.

Pour élever les variables dans C_2, nous devons résoudre un problème de sac alpin en variables 0-1 pour chaque coefficient d'élévation. En effet, supposons que nous sommes à une itération intermédiaire de la procédure de l'élévation, et soit $L = \{\text{variables déjà élevées}\}$ et $\bar{d} = d - \sum_{j \in C_2 - L} u_j$. Nous voulons traiter la variable $y_{j_k} \in C_2$, alors nous devons résoudre le problème suivant:

$$\begin{array}{rcll} \gamma_{max} & = & \max & \sum_{j \in C_1} y_j + \sum_{j \in L} \gamma_j y_j \\ & & \text{sujet à} & \\ & & & \sum_{j \in C_1 \cup L} u_j y_j \ \leq \ \bar{d} - u_{j_k} \\ & & & y_j = 0 \text{ ou } 1 \ , \forall j \in C_1 \cup L \end{array}$$

Donc le coefficient de la variable traitée serait $\gamma_{j_k} = \gamma_{max} - |C| + 1 - \sum_{j \in L} \gamma_j$.

De la même façon, pour élever les variables dans $N \backslash C$, nous devons résoudre le problème de sac alpin suivant:

$$\begin{array}{rcll} \alpha_{max} & = & \max & \sum_{j \in C_1} y_j + \sum_{j \in L} \alpha_j y_j \\ & & \text{sujet à} & \\ & & & \sum_{j \in C_1 \cup L} u_j y_j \ \leq \ d - u_{j_k} \\ & & & y_j = 0 \text{ ou } 1 \ , \forall j \in C_1 \cup L \end{array}$$

Et dans ce cas le coefficient de la variable y_{j_k} serait $\alpha_{j_k} = |C| - 1 + \sum_{j \in C_2} \gamma_j - \alpha_{max}$.

Mentionnons qu'il n'y a pas une méthode systématique pour déterminer la meilleure partition (C_1, C_2) de C. Les chercheurs utilisent généralement des heuristiques basées sur les informations liées à la solution courante.

Un cas particulier important arrive lorsque $C_2 = \phi$. Dans ce cas, seulement les variables dans $|N \backslash C|$ sont élevées pour donner l'inégalité de couverture élevée simple (ICES) suivante:

$$\sum_{j \in C} y_j + \sum_{j \in N \backslash C} \alpha_j y_j \leq |C| - 1$$

L'importance de ce cas particulier revient au théorème de Balas (1975) qui donne une formule pour déterminer de façon approchée tous les coefficients de l'élévation.

4.2.3 Applications antérieures

Depuis les années 70, les ICs existaient dans la littérature. Elles ont été utilisées à maintes reprises et avec succès dans des algorithmes de Branch-and-Cut pour résoudre des programmes entiers en variables 0-1 (Aardal et Weismantel 1997). Crowder, Johnson et Padberg (1983) ont été les premiers à utiliser ces inégalités dans des algorithmes de Cut-and-Branch pour résoudre des programmes entiers en varaibles 0-1.

Motivé par le succès que ces derniers ont rencontré, Van Roy et Wolsey (1987) ont utilisé les ICE, entre autres, pour créer un programme de résolution pour les modèles MIP connu sous le nom de MPSARX. Depuis, ces inégalités ont été incorporées dans des logiciels commerciaux pour résoudre des modèles de MIP: CPLEX (2000) et MINTO (Nemhauser, Savelsbergh et Sigismondi 1994).

Bien sûr, il y a eu des adaptations spéciales et des applications de ces IV à des problèmes spécifiques provenant d'applications réelles comme dans Aardal, Pochet et Wolsey (1995) pour le problème de localisation avec capacité, ou encore dans Barnhart, Hane et Vance (2000) pour un problème de flot multiproduits à variables entières. Pour une revue complète, voir les bibliographies de Aardal et Weismantel (1997), Caprara et Fischetti (1997) et Balakrishnan, Magnanti et Mirchandani (1997). Remarquons que, malgré la diversité et l'ampleur des études publiées concernant l'utilisation de cette IV, cette dernière n'a jamais été adaptée spécialement pour le PCC.

Une recherche exhaustive a été faite par Gu, Nemhauser et Savelsbergh (1998) concernant différentes façons de résoudre le problème de séparation et le problème d'élévation. Pour résoudre le problème de séparation, ils ont utilisé la programmation dynamique pour avoir une solution exacte, la relaxation linéaire pour avoir une solution approximative et une heuristique basée sur un algorithme vorace pour avoir une solution réalisable. La dernière a donné la meilleure performance que ce soit pour la qualité ou pour l'effort

requis. Pour le problème d'élévation, ils ont essayé plusieurs séquences pour l'élévation des variables.

Leurs contributions ne sont pas seulement expérimentales. Dans un autre article, Gu, Nemhauser et Savelsbergh (1999) ont pu démontrer que, étant donné une solution fractionnaire et une couverture minimale, le problème de déterminer une ICES violée est un problème NP-complet. De même, le problème de déterminer une ICES violée parmis toutes les couvertures minimales, étant donné une solution fractionnaire, est aussi un problème NP-complet.

Il reste une question importante: est-ce que la famille d'IC avec toutes ces variantes décrit-elle entièrement l'enveloppe convexe du polytope du sac alpin? La réponse est généralement non. Weismantel (1997) a identifié une classe d'inégalités pour des problèmes de sac alpin particuliers. Ces inégalités représentent des faces nécessaires pour la description complète de l'enveloppe convexe des problèmes étudiés. Il a prouvé que ces faces ne peuvent pas être générées comme des ICE.

4.3 Inégalités de couverture de flot

Les IV de couverture de flot ont été développées initialement par Padberg, Van Roy et Wolsey (1985) durant l'étude des propriétés polyédrales de la structure du noeud-seul ("single-node") que nous pouvons identifier dans des relaxations du problème de conception de réseaux. Soit P le domaine réalisable d'une telle structure (illustrée à la figure 3) où

$$P = \{y \in \{0,1\}^n, x \in R_+^n : \sum_{j \in N} x_j \leq d \ , \ x_j \ \leq \ u_j y_j \ , \forall \ j \in N\}.$$

Soit R_P le polytope de la relaxation linéaire de P, où

$$R_P = \{y \in R_+^n, x \in R_+^n : \sum_{j \in N} x_j \leq d \ , \ x_j \ \leq \ u_j y_j \ , \ y_j \leq 1 \ , \ \forall \ j \in N\}.$$

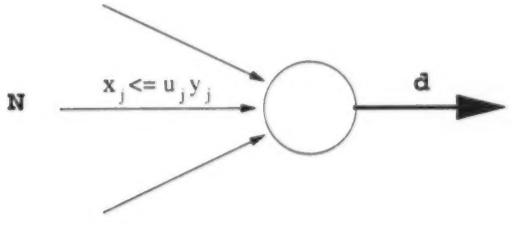

Figure 3: Problème à un seul noeud avec uniquement des arcs entrants.

Proposition 5: (Nemhauser et Wolsey 1988) Tout point extrême non entier de R_P est de la forme :

$$\begin{array}{lll} \hat{x}_j = u_j\,, & \hat{y}_j = 1\,, & \forall j \in C\backslash\{k\} \\ \hat{x}_k = d - \sum_{j\in C\backslash\{k\}} u_j\,, & \hat{y}_k = \frac{1}{u_k}(d - \sum_{j\in C\backslash\{k\}} u_j) & \\ \hat{x}_j = 0\,, & \hat{y}_j \in \{0,1\}\,, & \forall j \in N\backslash C \end{array}$$

où $C \subset N$ est une couverture de flot et $C\backslash\{k\}$ ne l'est pas.

Soit $\lambda = \sum_{j\in C} u_j - d$ l'excès de capacité de l'ensemble C. Pour tout $k \in C$, la capacité de l'ensemble $C\backslash\{k\}$ est

$$\min\{\sum_{j\in C\backslash\{k\}} u_j\,,\, d\} \;=\; d - (u_k - \lambda)^+$$

où $(x)^+ = \max(0, x)$.

Alors pour tout $C' \in C$, la capacité de l'ensemble $C\backslash C'$ est donnée par

$$d - (\sum_{j\in C'} u_j - \lambda)^+ \;\leq\; d - \sum_{j\in C'} (u_j - \lambda)^+.$$

Ce résultat nous amène à introduire l'*inégalité de couverture de flot* ou ICF (Padberg, Van Roy et Wolsey 1985).

Proposition 6: Si $C \subset N$ est une couverture de flot et $\lambda = \sum_{j\in C} u_j - d$ est l'excès de capacité, alors

$$\text{(ICF)} \qquad \sum_{j\in C} x_j \;\leq\; d - \sum_{j\in C} (u_j - \lambda)^+ (1 - y_j) \tag{21}$$

est une IV pour P.

Remarquons que le point extrême non entier, $(\hat{x}, \hat{y})$ donné par la proposition 5, ne vérifie pas cette IV. Ceci implique que l'inégalité (21) est un hyperplan qui sépare le point du domaine réalisable de R_P. En plus, Padberg, Van Roy et Wolsey (1985) démontrent que si $\bar{u} = \max_{j\in C} u_j > \lambda$ alors l'IV (21) définit une facette de $conv(P)$.

De la même façon, Van Roy et Wolsey (1986a) ont généralisé l'ICF (21) pour une structure similaire à la première mais ayant des arcs entrants et sortants. Cette structure est illustrée par la figure 4. Donc, soit P le domaine définissant une telle structure, où

$$P = \{y \in \{0,1\}^n, x \in R_+^n : \sum_{j\in N_1} x_j - \sum_{j\in N_2} x_j \leq d, x_j \leq u_j y_j, \forall j \in N_1 \cup N_2\}.$$

L'inégalité dérivée pour cette structure est connue sous le nom d'*inégalité de couverture de flot généralisée* (ICFG) donnée par la proposition 7.

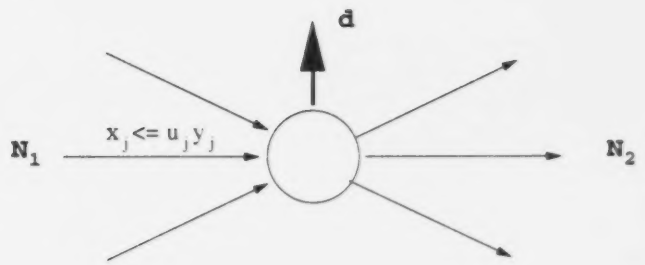

Figure 4: Problème à un seul noeud avec des arcs entrants et sortants.

Proposition 7: Si $C = (C_1, C_2)$ est une couverture de flot généralisée dans le sens où $\sum_{j\in C_1} u_j - \sum_{j\in C_2} u_j = d + \lambda$, avec $\lambda > 0, C_1 \subseteq N_1$, et $C_2 \subseteq N_2$, et si $L_2 \subseteq N_2 \backslash C_2$, alors

$$\text{(ICFG)} \qquad \begin{aligned} \sum_{j\in C1} x_j + \sum_{j\in C_1} (u_j - \lambda)^+ (1 - y_j) \;&\leq\; d + \sum_{j\in C_2} u_j \\ &+ \sum_{j\in L_2} \lambda y_j + \sum_{j\in N_2\backslash(C_2\cup L_2)} x_j \end{aligned}$$

est une IV pour P.

Les auteurs, dans leur article, ont démontré que dans le cas où $C_2 = \phi, d > 0, \bar{u} = max_{j\in C_1} u_j > \lambda$ et $u_j > \lambda, \forall j \in L_2$, l'ICFG définit une facette de conv(P). Mais si $C_2 \neq \phi$, l'inégalité ne représente plus une facette, en général, et elle doit être renforcée par l'application de la technique d'élévation séquentielle. Cependant, l'élévation dans ce cas est extrêmement difficile parce que nous devons calculer pour chaque élévation deux coefficients pour le couple (x_j, y_j) en même temps, ce qui fait qu'il faut résoudre pour chaque couple (x_j, y_j) un problème MIP.

4.3.1 Problème de séparation

Le problème de séparation, dont le but est de générer une ICF violée par la solution courante (x^*, y^*), est extrêmement difficile à résoudre et très coûteux. En effet, pour trouver la couverture de flot $C = (C_1, C_2)$ pour laquelle l'inégalité (ICFG) est la plus violée, définissons Z^1 et Z^2 comme étant les vecteurs caractéristiques de C_1 et C_2 respectivement. Le problème de séparation de l'ICF est le suivant:

$$\begin{aligned} Z_{sep} = \quad & \max \quad \sum_{j\in N_1} (x_j^* + (u_j - \lambda)^+ (1 - y_j^*)) z_j^1 - d - \sum_{j\in N_2} u_j z_j^2 \\ & \qquad - \sum_{j\in N_2} \min(\lambda y_j^*, x_j^*)(1 - z_j^2) \\ & \text{sujet à} \\ (SepICFG) \quad & \sum_{j\in N_1} u_j z_j^1 - \sum_{j\in N_2} u_j z_j^2 \;=\; d + \lambda \\ & \lambda \;>\; 0 \\ & z_j^1 = 0 \text{ ou } 1 \;, \forall j \in N_1 \\ & z_j^2 = 0 \text{ ou } 1 \;, \forall j \in N_2 \end{aligned}$$

Dans le but de résoudre un tel problème, les chercheurs utilisent des simplifications et des relaxations comme:

- Poser $L_2 = N_2 \backslash C_2$.
- Remplacer $(u_j - \lambda)^+$ par $(u_j - \lambda)$.
- Remplacer x_j^* par $u_j y_j^*, \forall j \in N_1$.
- Substituer d par sa valeur en fonction de λ.
- Substituer $\lambda > 0$ dans la première contrainte.

Après avoir posé ces conditions, le problème de séparation devient un problème de sac alpin en variables 0-1:

$$
\begin{array}{rcll}
 & Z_{sep} = & \max & \sum_{j \in N_1} (y_j^* - 1)) z_j^1 + \sum_{j \in N_2} y_j^* z_j^2 \\
 & & \text{sujet à} & \\
(SepICFG) & & & \sum_{j \in N_1} u_j z_j^1 - \sum_{j \in N_2} u_j z_j^2 > d \\
 & & & z_j^1 = 0 \text{ ou } 1 \ , \forall j \in N_1 \\
 & & & z_j^2 = 0 \text{ ou } 1 \ , \forall j \in N_2
\end{array}
$$

Bien sûr, le problème de séparation simplifié demeure un problème difficile à résoudre et ne génère pas nécessairement une bonne ICF violée, mais du moins, on dispose de plusieurs algorithmes relativement efficaces pour le résoudre, que ce soit des heuristiques, des relaxations ou même des algorithmes de programmation dynamique.

4.3.2 Applications antérieures

Les inégalités de couverture de flot ont été utilisées à maintes reprises dans la littérature. Van Roy et Wolsey (1987) ont démontré l'amélioration effective de la formulation du PCS suite à l'ajout des ICF.

Tout comme les inégalités de couverture, les ICF ont été incorporées dans des logiciels commerciaux, comme MPSARX (Van Roy et Wolsey 1987), CPLEX (2000) et MINTO (Nemhauser, Savelsbergh et Sigismondi 1994), pour créer des algorithmes de branch-and-cut efficaces pour résoudre des modèles de MIP.

De même, ces IV ont été adaptées par les chercheurs pour des problèmes spécifiques. Mentionnons principalement Aardal, Pochet et Wolsey (1995) qui ont utilisé les ICF pour reformuler le problème de localisation avec capacité. Les auteurs ont démontré que ces IV représentent en fait des facettes de l'enveloppe convexe du PLC sous certaines conditions. De plus, les auteurs ont dérivé d'autres IV en se basant sur le même principe (couverture de flot). Il y a également Magnanti, Mirchandani et Vachani (1993) qui se sont basés sur le même principe pour dériver des IV, qui sont connues sous le nom d'*inégalités de capacités résiduelles*, pour le problème d'installation sur les arcs avec un

seul type de capacité (PIA1). En fait, les auteurs ont travaillé sur le problème lagrangien obtenu du PIA1 après avoir relaxé les contraintes de conservation de flot. En plus, les auteurs ont démontré que la nouvelle formulation du problème lagrangien, obtenue en lui additionnant des inégalités de capacités résiduelles et des inégalités dérivées à partir des contraintes de conservation de flot, décrit entièrement l'enveloppe convexe du sous-problème étudié.

Dernièrement, Gu, Nemhauser et Savelsberg (1999a) ont développé une méthode pour résoudre le problème d'élévation de l'ICF moyennant la technique d'élévation séquentielle indépendante. Cependant, puisque la fonction d'élévation de l'ICF n'est pas superadditive, les auteurs ont dû passer par des simplifications et des relaxations pour trouver une fonction superadditive qui domine la fonction d'élévation. Les auteurs ont prouvé, expérimentalement, l'amélioration apportée à la formulation, en général, et à la qualité de l'ICF, en particulier, par l'utilisation de la technique d'élévation séquentielle indépendante.

4.4 Inégalités basées sur des coupes

Ces types d'inégalités sont dérivées à partir des coupes du réseau (i.e., les arcs entre deux sous-ensembles de sommets forment une partition) selon certains critères, dont les plus utilisés sont le critère de conservation de flot et le critère de capacité.

4.4.1 Inégalités de réseaux

Van Roy et Wolsey (1986) ont identifié une famille d'IV, l'*inégalités de réseaux* ("network inequalities"), pour le PCS avec un seul produit, une origine et plusieurs destinations (ou PCS(1P)). Une généralisation de cette inégalité, "dicut inequalities", est étudiée dans Rardin et Wolsey (1993). Nous rappelons qu'une formulation du PCS est donnée à la section 2.1 où les capacités u_{ij} sont remplacées par $\sum_{i \in N} d_i$ (d_i représente la demande du noeud i), N est l'ensemble des noeuds et A est l'ensemble des arcs. L'idée principale de cette famille est basée sur le principe de conservation de flot pour un sous-ensemble d'arcs définissant une coupe qui sépare éventuellement l'origine de certaines destinations. Soit $X \subset N$ un sous-ensemble de noeuds et soient

$$\begin{aligned} E(X) &= \{(i,j) \in A : i \in X, j \in X\}, \\ (X, \bar{X}) &= (X, N \backslash X) = \{(i,j) \in A : i \in X, j \in N \backslash X\}. \end{aligned}$$

Définition 3: Le triplet (X, R, C) est compatible si

$$X \subset N\ ,\ \ R \subseteq E(X)\ ,\ \ C \subseteq (\bar{X}, X).$$

Proposition 8: Étant donné un triplet compatible (X, R, C) (illustré à la figure 5), alors

$$\sum_{(i,j) \in C} x_{ij} \leq \sum_{(i,j) \in C} \alpha_j^R y_{ij} + \sum_{(i,j) \in E(x) \backslash R} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in (X, \bar{X})} x_{ij} \qquad (22)$$

est une IV pour le PCS(1P), où α_j^R est égal à la totalité de la demande pouvant être satisfaite à partir de j et en utilisant seulement les arcs de R.

La démonstration de la validité de (22) est basée sur le fait que tout flot circulant sur les arcs de C doit être

a) un flot qui circule sur les arcs de R et qui satisfait une certaine demande $d_i, i \in X$, ou

b) un flot qui circule sur les arcs de $E(X)\backslash R$, ou

c) un flot qui circule sur les arcs de $(X, \bar{X})$.

Van Roy et Wolsey (1986) démontrent que l'inégalité (22) représente une facette pour certains cas particuliers du PCS(1P) (le problème de "lot- sizing").

Mentionnons simplement que le problème d'élévation de cette inégalité n'a jamais été étudié, ni dans Van Roy et Wolsey (1986), ni dans aucun autre travail publié.

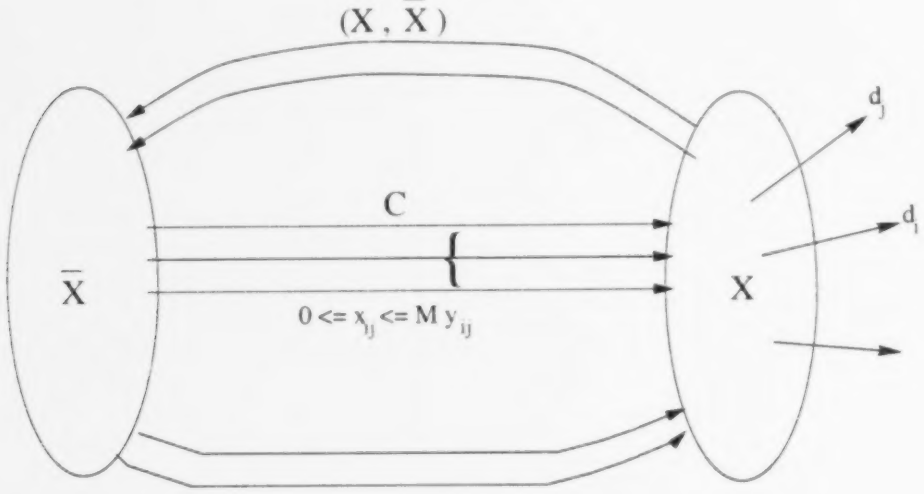

Figure 5: La coupe $(X, \bar{X})$.

Problème de séparation:

Afin de générer une inégalité de réseaux violée, étant donné une solution (x^*, y^*) d'une

relaxation du problème qui n'est pas réalisable pour le PCS (y^* n'est pas entier), il faut déterminer un triplet compatible, le meilleur si possible, (X, R, C) tel que

$$\sum_{(i,j)\in C} x^*_{ij} > \sum_{(i,j)\in C} \alpha^R_j y^*_{ij} + \sum_{(i,j)\in E(x)\setminus R} x^*_{ij} + \sum_{(i,j)\in(X,\bar{X})} x^*_{ij}.$$

Pour pouvoir résoudre le problème de séparation, Van Roy et Wolsey (1986) proposent deux problèmes modifiés, plus simples que le problème de séparation original. Le premier consiste à choisir l'ensemble C étant donné que X et R sont fixes alors que, le deuxième consiste à choisir le meilleur ensemble X étant donné que C est fixe. Dans le deuxième problème, les auteurs supposent que $R = E(X)$.

Applications antérieures:

Tout comme les IC et les ICF, les inégalités de réseaux ont été implantées par Van Roy et Wolsey (1987) dans un système de résolution pour les MIP (MPSARX). Les résultats expérimentaux ont démontré l'efficacité de ces inégalités pour des PCS(1P). Mais, l'utilisation de ces IV a été limitée à des problèmes spécifiques de PCS(1P) comme le "lot-sizing" (Barany, Van Roy et Wolsey 1984a, 1984b).

Van Roy et Wolsey (1986) ont donné une adaptation de l'inégalité de réseaux pour traiter des problèmes ayant des capacités sur les arcs de $(E(X)\setminus R \cup (X, \bar{X}))$. Cependant, Il n'y a pas eu d'études publiées sur la possibilité d'étendre l'inégalité pour le PCC.

4.4.2 Inégalités de coupes

Dans une étude de propriétés polyédrales pour le problème d'installation sur les arcs à une origine-destination, Magnanti, Mirchandani et Vachani (1995) ont adapté les inégalités de coupes connues qui sont basées sur le critère du théorème célèbre de flot maximal-coupe minimale. L'idée de base est la suivante: étant donné une certaine installation de capacités sur les arcs, le problème admet une solution réalisable si et seulement si la capacité de chaque coupe séparant l'origine de la destination est plus grande que la demande. Ainsi, soit $\{S, T\} = \{(i, j) \in A : i \in S \subset N, j \in T = N\setminus S\}$ une coupe et soient

$D_{S,T}$: la demande à travers de la coupe $\{S, T\}$;

$Y^l_{S,T}$: le nombre total d'éléments de capacité l installés sur les arcs de la coupe $\{S, T\}$.

Proposition 9: L'inégalité

$$Y_{S,T} \geq \lceil D_{S,T}/C \rceil \tag{23}$$

est valide pour le PIA à un type de capacité (PIA1), où C est la capacité.
En plus, l'IV (23) définit une facette du PIA1 dans le cas où $D_{S,T} > 0$, c'est-à-dire dans le cas où $\{S, T\}$ est une coupe origine-destination.

Proposition 10: L'inégalité

$$Y^1_{S,T} + r_{S,T} Y^2_{S,T} \geq r_{S,T} \lceil D_{S,T}/C \rceil$$

est valide pour le PIA à deux types de capacité (PIA2), où

1 est la capacité du premier type,

C est la capacité du deuxième type,

et $r_{S,T} = D_{S,T} mod(C)$.

Proposition 11: L'inégalité

$$Y^1_{S,T} + r_{S,T} Y^2_{S,T} + \lambda r_{S,T} Y^3_{S,T} \geq r_{S,T} \lceil D_{S,T}/C \rceil$$

est valide pour le PIA à trois types de capacité (PIA3), où

1 est la capacité du premier type,

C est la capacité du deuxième type,

λC est la capacité du troisième type,

et $r_{S,T} = D_{S,T} mod(C)$.

Les auteurs généralisent cette inégalité pour un PIA à plusieurs origines-destinations.

Problème de séparation:

Le problème de séparation pour l'inégalité de coupe consiste à trouver une coupe, la meilleure si possible, $\{S, T\}$ pour laquelle l'inégalité est violée. Cependant, trouver une telle coupe, même pour un problème de PIA avec une seule origine et une seule destination, est une tâche difficile (problème de flot maximal, voir Mirchandani 1989). D'ailleurs, la complexité du problème de séparation de l'inégalité de coupe est considéré encore ouvert. Toutefois, afin de générer de bonnes coupes qui engendrent des inégalités de coupes violées, les chercheurs utilisent des heuristiques qui se sont révélées efficaces (Atamtürk 2000).

Applications antérieures:

L'existence de l'inégalité de coupe remonte loin dans la littérature. Cependant, Magnanti et Mirchandani (1993) et Magnanti, Mirchandani et Vachani (1993, 1995) ont été les premiers à utiliser ces inégalités pour traiter les PIA à un ou deux types de capacités. La généralisation de cette inégalité pour des PIA plus généraux (multiproduits et plusieurs types de capacités sans aucune restriction) est dûe à Atamürk (2000). L'auteur a développé des heuristiques pour résoudre les problèmes de séparations pour chaque inégalité étudiée.

Magnanti et Mirchandani (1993) développent deux autres familles d'IV basées sur le même principe en utilisant des techniques d'élévations séquentielles. Les auteurs démontrent que les deux familles d'IV identifiées définissent des facettes de $conv(PIA3)$ sous certaines conditions.

Les inégalités de coupes avec la technique de Chvátal-Gomory (combinaison linéaire et intégralité) ont été utilisées par Magnanti, Mirchandani et Vachani (1993) pour décrire entièrement l'enveloppe convexe du PIA à trois noeuds, un type de capacité et plusieurs produits.

Magnanti, Mirchandani et Vachani (1995) ont résolu le PIA2 en lui ajoutant des inégalités de coupes, des inégalités de capacité résiduelle et des inégalités redondantes liées à la demande. Les résultats numériques ont montré une amélioration considérable dans l'écart entre la formulation MIP et la relaxation linéaire.

L'efficacité de ces IV à améliorer les formulations des problèmes a été prouvée non seulement pour des cas spécifiques traitant des situations réelles comme dans Barnhart, Jin et Vance (2000), mais surtout lorsqu'incorporées dans des algorithmes de branch-and-cut pour résoudre des PIA; voir notamment les travaux de Barahona (1996), Bienstock et Günlük (1996) et Günlük (1999).

5 Logiciels généraux

Comme nous l'avons mentionné précédemment, toutes les inégalités présentées dans la section précédente ont été utilisées à maintes reprises dans des algorithmes de branch-and-cut. Elles ont notamment été incorporées dans des logiciels commerciaux sophistiqués comme par exemple CPLEX (2000), Xpress-MP (1999), MINTO (Nemhauser, Savelsbergh et Sigismondi 1994), MPSARX (Van Roy and Wolsey 1987). Ces logiciels représentent actuellement les meilleurs outils généraux de résolution connus pour résoudre des modèles MIP.

Bien que le PCC n'ait fait l'objet d'aucune étude polyédrale, nous savons qu'il contient des structures particulières cachées dans ses différentes relaxations, comme la structure du sac alpin et la structure de "single-node" étudiée par Van Roy et Wolsey (1986a). Par conséquent, les inégalités de couverture et de couverture de flot sont des IV pour le PCC. Étant donné que ces inégalités, entre autres, ont été incorporées dans le logiciel CPLEX, nous avons décidé de tester la méthode de branch-and-cut de CPLEX, version 7.0, sur un large ensemble d'instances du PCC ayant différentes caractéristiques. Nous tenons à rappeler que la formulation forte du PCC s'est révélée meilleure que la faible (Gendron, Crainic et Frangioni 1998). Malgré ce fait, nous avons décidé de tester le branch-and-cut de CPLEX sur les deux formulations pour deux raisons: tout d'abord, pour comparer le nombre d'IV générées par l'algorithme sur les deux formulations et pour mettre en parallèle ce nombre avec l'amélioration apportée. La deuxième raison est que

Table 1: Résultats expérimentaux.

Pi	Description N-A-P	Solution	Temps	Nb Noeuds	Coupes (GUB,IC,ICF)
P1	25-100-10	49899*	40.58	419	(2,3,116)
P2	25-100-30	85530*	534.18	1350	(1,2,75)
P3	20-230-40	643036*	671.76	1618	(0,0,116)
P4	20-300-40	604196*	59.88	92	(0,0,51)
P5	20-230-200	137271	36000	11	(0,0,0)
P6	20-300-200	108252	36000	10	(0,0,0)
P7	100-400-10	66364	36000	1253	(2,6,610)
P8	30-700-100	55082	36000	118	(0,0,5)
P9	30-520-400	-	36000	0	(0,0,0)
P10	30-700-400	-	36000	0	(0,0,0)

nous voulons tenter d'améliorer davantage la qualité de la solution obtenue, dans le cas où cette dernière n'est pas optimale, en laissant à CPLEX la possibilité de générer davantage des IV violées sur une formulation moins forte (formulation faible) du problème. Ainsi, nous avons exécuté la méthode de branch-and-cut de CPLEX sur les formulations faible et forte de près de 200 problèmes tests sur un ordinateur Entreprise 10000, 64 G de Ram, 400MHz. Ces problèmes sont obtenus avec le générateur de réseau décrit dans Crainic, Frangioni et Gendron (2001). Nous avons activé plusieurs catégories d'IV implantées dans CPLEX et nous avons imposé une limite de temps CPU de dix heures dans le but de trouver, soit une solution optimale du problème, soit une solution réalisable (donc une borne supérieure sur l'objectif) de meilleure qualité.

Nous rapportons dans le tableau 1 quelques résultats obtenus sur la formulation forte de 10 problèmes, qui sont particulièrement difficiles, car ils présentent des coûts fixes élevés relativement aux coûts de transport et des capacités très contraignantes. Nous omettons les résultats obtenus sur la formulation faible, parce qu'encore une fois, la formulation forte a prouvé sa supériorité, malgré que le nombre de coupes générées pour la formulation faible soit nettement plus élevé. Dans la colonne "Description", N, A et P représentent le nombre de noeuds, d'arcs et de produits respectivement. Dans la colonne "Coupes", à part les inégalités de couverture (IC) et de couverture de flot (ICF), nous avons également généré des inégalités "general upper bound" (GUB), qui représentent une adaptation de l'IC, généralement plus serrée que cette dernière. Les chiffres dans cette colonne représentent le nombre de coupes générées pour les trois types d'inégalités durant l'exécution de l'algorithme. La colonne "Solution" montre la valeur soit de la solution optimale (marquée par une étoile), soit de la meilleure solution réalisable trouvée par l'algorithme. Le temps d'exécution de l'algorithme et le nombre de noeuds explorés sont donnés dans les colonnes "Temps" et "Nb noeuds", respectivement.

Les résultats montrent clairement que le nombre de coupes générées diminue avec l'augmentation du nombre de produits, donc quand le problème devient plus difficile. Pour des problèmes de grande taille (P5 à P10), CPLEX n'a pu résoudre à l'optimum aucune instance, ni même trouver une solution réalisable pour certains problèmes, même après dix heures de temps de calcul. On remarque également que pour les problèmes à 400 produits, CPLEX a utilisé tout le temps alloué pour calculer la relaxation linéaire à la racine de l'arbre d'énumération. Suite à ces résultats, nous constatons que les implantations générales des IV pertinentes au PCC ne sont pas suffisantes pour améliorer la formulation du problème, donc la qualité des solutions obtenues.

6 Conclusion

Dans cet article, notre objectif principal était de présenter une revue de littérature sur les IV pertinentes au problème de conception de réseaux multiproduits avec coût fixe et capacité, ou PCC. Dans un premier temps, nous avons présenté une formulation du PCC, ainsi que les méthodes utilisées pour le résoudre. Nous avons pu constater que les méthodes de relaxation classiques ne sont pas suffisantes pour résoudre des exemplaires de grande taille du problème. Cependant, une combinaison des méthodes de relaxation avec des heuristiques semble prometteuse. De plus, une amélioration de la formulation paraît d'une importance cruciale afin de resserrer les bornes issues des relaxations. Par la suite, nous avons présenté trois grandes classes d'IV pertinentes au PCC, et qui ont été largement étudiées pour des problèmes apparentés au PCC.

À la lumière des résultats expérimentaux, nous avons montré que les implantations générales des IV dans des logiciels commerciaux sophistiqués ne sont pas suffisantes pour améliorer la qualité des solutions obtenues, surtout pour les instances de grande taille. Cependant, ces résultats ne mettent pas en doute l'efficacité des approches polyédrales à améliorer la formulation du PCC. Rappelons que, puisque les problèmes de séparation et d'élévation doivent être résolus par des heuristiques, une compréhension profonde du problème à résoudre, ainsi que des adaptations particulières des inégalités utilisées, s'avèrent essentielles afin de développer des méthodes efficaces. Dans ce contexte, une étude approfondie des propriétés polyédrales du PCC paraît nécessaire.

Remerciements

Ce travail a été réalisé grâce au soutien financier du CRSNG (Canada), du Fonds FCAR (Québec) et du Réseau de Calcul et de Modélisation Mathématique (RCM2). Nous remercions M. Dominique Tourillon pour son aide avec l'expérimentation numérique.

References

[1] Aardal K. 1998, *Capacitated Facility Location: Separation Algorithms and Computational Experience*, Mathematical Programming 81, 149-175.

[2] Aardal K., Pochet Y. et Wolsey L.A. 1995, *Capacitated Facility Location: Valid Inequalities and Facets*, Mathematics of Operations Research 20, 562-582.

[3] Aardal K. et Weismantel R. 1997, *Polyhedral Combinatorics, Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization*, Dell'Amico M, Maffioli F., Mortello S. (éds.), Wiley-Interscience, 31-44.

[4] Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin J.B. et Reddy M.R. 1995, *Applications of Network Optimization*, chapitre 1 du *Network Models*, Handbooks in Operations Research and Management Science 7, 1-83.

[5] Atamtürk A. 2000, *On Capacitated Network Design Cut-Set Polyhedra*, Technical Report, University of California, Berkeley, California.

[6] Balakrishnan A. 1984, *Valid Inequalities and Alforithms for the Network Design Problem with an Application to LTL Consolidation*, Ph.D. Dissertation, MIT Sloan School of Management, Cambridge, Mass.

[7] Balakrishnan A., Magnanti T.L. et Mirchandani P. 1997, *Network Design, Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization*, Dell'Amico M, Maffioli F., Mortello S. (éds.), Wiley-Interscience, 311-334.

[8] Balakrishnan A., Magnanti T.L. et Wong R.T. 1989, *A Dual-Ascent Procedure for Large-Scale Uncapacitated Network Design*, Operations Research 37, 716-740.

[9] Balas E. 1975, *Facets of the Knapsack Polytope*, Mathematical Programming 8, 146-164.

[10] Balas E. et Zemel E. 1984, *Lifting and Complementing Yields all the Facets of Positive Zero-One Programming Polytopes*, Mathematical Programming, Proceedings of the International Conference on Mathematical Programming, Cottel R.W. *et al.* (éds.), 13-24.

[11] Barahona F. 1996, *Network Design Using Cut Inequalities*, SIAM Journal of Optimimization 6, 823-837.

[12] Barany I, Van Roy T.J. et Wolsey L.A. 1984a, *Stong Formulation for Multi- Item Capacitated Lot-Sizing*, Management Science 30, 1255-1271.

[13] Barany I, Van Roy T.J. et Wolsey L.A. 1984b, *Uncapacitated Lot Sizing: the Convex Hull of Solutions*, Mathematical Programming Study 22, 32-43.

[14] Barnhart C., Hane C. et Vance P.H. 2000, *Using Branch-and-Price-and-Cut to solve Origin-Destination Integer Multicommodity Flow Problems*, Operations Research 48, 318-326.

[15] Barnhart C., Jin H. et Vance P.H. 2000, *Railroad Bolcking: a Network Design Application*, Operations Research 48, 603-614.

[16] Benders J.F. 1962, *Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems*, Numerische Mathematik 4, 238-252.

[17] Bienstock D. et Günlük O. 1996, *Capacitated Network Design-Polyedral Structure and Computation*, INFORMS Journal on Computing 8, 243-259.

[18] Bienstock D. et Muratore G. 2000, *Strong Inequalities for Capacitated Survivable Network Design Problems*, Mathematical Programming 89, 127-147.

[19] Bilde O. et Krarup J. 1977, *Sharp Lower Bounds and Efficient Algorithms for the Simple Plant Location Problem*, Annals of Discrete Mathematics 1, 79-97.

[20] Caprara A. et Fischetti M. 1997, *Branch-and-Cut Algorithms, Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization*, Dell'Amico M, Maffioli F., Mortello S. (éds.), Wiley-Interscience, 31-44.

[21] Chopra S., Gilboa I, et Sastry S.T. 1998, *Source Sink Flows with Capacity Installation in Batches*, Discrete Applied Mathematics 85, 165-192.

[22] Chvátal V. 1973, *Edmonds Polytopes and a Hierarchy of Combinatorial Problems*, Discrete Mathematics 4, 305-337.

[23] Conn A.R. et Cornuéjols G. 1990, *A projection Method for the Uncapacitated Facility Location Problem*, Mathematical Programming 46, 273-298.

[24] Cornuéjols G., Nemhauser G.L. et Wolsey L.A. 1990, *The Uncapacitated Facility Location Problem*, in *Discrete Location Theory*, Mirchandani P.B. et Francis R.L. (éds), Wiley-Intersience, 119-171.

[25] Cornuéjols G., Sridharan R. et Thizy J.M. 1991, *A Comparison of Heuristics and Relaxations for the Capacitated Plant Location Problem*, European Journal of Operations Research 50, 280-297.

[26] CPLEX Optimization, Inc. 2000, *Using the CPLEX Callable Library and CPLEX Mixed Integer Library*, version 7.0.

[27] Crainic T.G., Frangioni A. et Gendron B. 2001, *Bundle-Based Relaxation Methods for Multicommodity Capacitated Fixed Charge Network Design Problems*, à paraître dans Discrete Applied Mathematics.

[28] Crainic T.G., Gendreau M. et Farvolden J. 2000, *A Simplex-Based Tabu Search Method for Capacitated Network Design*, INFORMS Journal on Computing 12, 223-236.

[29] Crainic T.G. et Laporte G. 1997, *Planning Models for Freight Transportation*, European Journal of Operation Research 97, 409-438.

[30] Crowder H., Johnson E.L. et Padberg M.W. 1983, *Solving Large Scale Zero-One Linear Programming Problems*, Operations Research 31, 803-834.

[31] Epstein R. 1998, *Linear Programming and Capacitated Network Loading*, Ph.D. Dissertation, MIT Sloan School of Management, Cambridge, Mass.

[32] Erlenkotter D. 1978, *A Dual-Based Procedure for Uncapacitated Facility Location*, Operations Research 26, 992-1009.

[33] Gabrel V., Knippel A. et Minoux M. 1999, *Exact Solution of Multicommodity Network Optimization Problems with General Step Cost Functions*, Operations Research Letters, vol. 25, 15-23.

[34] Gendron B. et Crainic T.G. 1994, *Relaxations for Multicommodity Capacitated Network Design Problems*, Publication CRT-96-05, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal, Montréal.

[35] Gendron B. et Crainic T.G. 1996, *Bounding Procedures for Multicommodity Capacitated Fixed Charge Network Design Problems*, Publication CRT-96-06, Centre de recheche sur les transports, Université de Montréal, Montréal.

[36] Gendron B., Crainic T.G. et Frangioni A. 1998, *Multicommodity Capacitated Network Design, Telecommunications Network Planning*, Sansó B., Soriano P. (éds.), Kluwer Academic Publishers, Norwell MA., 1-19.

[37] Ghamlouche I., Crainic T.G. et Gendreau M. 2001, *Cycle-Based Neighborhoods for Fixed-Charge Capacitated Multicommodity Network Design*, Publication CRT-2000-01, Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal, Montréal.

[38] Gomory R.E. 1958, *Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs*, Bulletin of the American Mathematical Society 64, 275-278.

[39] Gomory R.E. 1969, *Some Polyhedra Related to Combinatorial Problems*, Linear Algebra and Its Applications 2, 451-558.

[40] Gu Z., Nemhauser G.L. et Savelsbergh M.W.P. 1998, *Lifted Cover Inequalities for 0-1 Integer Programs: Computation*, INFORMS Journal on Computing 10, 427-437.

[41] Gu Z., Nemhauser G.L. et Savelsbergh M.W.P. 1999, *Lifted Covers Inequalities for 0-1 Integer Programs: Complexity*, INFORMS Journal on Computing 11, 117-123.

[42] Gu Z., Nemhauser G.L. et Savelsbergh M.W.P. 1999a, *Lifted Flow Cover Inequalities for Mixed 0-1 Integer Programs*, Mathematical Programming 85, 439-467.

[43] Günlük O. 1999, *A Branch-and-Cut Algorithm for Capacitated Network Design Problems*, Mathematical Programming 86, 17-39.

[44] Hellstrand J., Larsson T. et Migdalas A. 1992, *A Characterization of the Uncapacitated Network Design Polytope*, Operations Research Letters 12, 159-163.

[45] Hernu G. 2001, *Heuristique basée sur la programmation mathématique pour le problème de conception de réseau avec coût fixe et capacité*, Mémoire de Maitrise, CRT-2001-11, Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal, Montréal.

[46] Holmberg K. et Hellstrand J. 1998, *Solving the Uncapacitated Network Design Problem by a Lagrangean Heuristic and Branch-and-Bound*, Operations Research 46, 247-259.

[47] Holmberg K. et Yuan D. 2000, *A Lagrangean Heuristic Based Branch-and-Bound Approach for the Capacitated Network Desing Problem*, Operations Research 48, 461-481.

[48] Krarup J. et Pruzan P.M. 1983, *The Simple Plant Location Problem: Survey and Synthesis*, European Journal of Operation Research 12, 36-81.

[49] Leung J.M.Y. et Magnanti T.L. 1989, *Valid Inequalities and Facets of the Capacitated Plant Location Problems*, Mathematical Programming 44, 271-291.

[50] Magnanti T.L. et Mirchandani P.B. 1993, *Shortest Paths, Single Origine- Destination Network Design, and Associated Polyhedra*, Networks 23, 103-121.

[51] Magnanti T.L., Mirchandani P.B. et Vachani R. 1993, *The Convex Hull of Two Core Capacitated Network Design Problems*, Mathematical Programming 60, 233-250.

[52] Magnanti T.L., Mirchandani P.B. et Vachani R. 1995, *Modeling and Solving the Two-Facility Capacitated Network Loading Problem*, Operations Research 43, 142-157.

[53] Magnanti T.L. et Wong R.T. 1984, *Network Design and Transportation Planning: Models and Algorithms*, Transportation Science 18, 1-55.

[54] Minoux M. 1989, *Network Synthesis and Optimum Network Design Problems: Models, Solution Methods and Applications*, Networks 19, 313-360.

[55] Mirchandani P. 1989, *Polyhedral Structure of a Capacitated Network Design Problem with an Application to the Telecommunication Industry*, Ph.D. Dissertation, MIT Sloan School of Management, Cambridge, Mass.

[56] Mirchandani P.B. et Francis R.L. 1990, *Discrete Location Theory*, Wiley-Interscience.

[57] Nemhauser G.L., Savelsbergh M.W.P. et Sigismondi G. 1994, *MINTO, a Mixed Integer Optimizer*, Operations Research Letters 15, 47-58.

[58] Nemhauser G.L. et Wolsey L.A. 1988 *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley-Interscience.

[59] Padberg M.W. 1973, *On the Facial Structure of Set Packing Polyhedra*, Mathematical Programming 5, 199-215.

[60] Padberg M.W. et Rinaldi G. 1987, *Optimization of 532-city Symmetric Traveling Salesman Problem by Branch-and-Cut*, Operations Research Letters 6, 1-7.

[61] Padberg M.W., Van Roy T.J. et Wolsey L.A. 1985, *Valid Linear Inequalities for Fixed Charge Problems*, Operations Research 33, 842-861.

[62] Rardin R.L. et Wolsey L.A. 1993, *Valid Inequalities and Projecting the Multicommodity Extended Formulation for Uncapacitated Fixed Charge Network Flow Problems*, European Journal of Operation Research 71, 95-109.

[63] Schrijver A. 1980, *On Cutting Planes*, Annals of Discrete Mathematics 9, 291-296.

[64] Stallaert J. 2000, *Valid Inequalities and Separation for Capacitated Fixed Charge Flow Problems*, Discrete Applied Mathematics 98, 265-274.

[65] Van Roy T.J. et Wolsey L.A. 1986, *Valid Inequalities and Separation for Uncapacitated Fixed Charge Networks*, Operations Research Letters 4, 105-112.

[66] Van Roy T.J. et Wolsey L.A. 1986a, *Valid Inequalities for Mixed 0-1 Programs*, Discrete Applied Mathematics 14, 199-213.

[67] Van Roy T.J. et Wolsey L.A. 1987, *Solving Mixed Integer Programming Problems Using Automatic Reformulation*, Operations Research 35, 45-57.

[68] Weismantel R. 1997, *On the 0-1 Knapsack Polytope*, Mathematical Programming 77, 49-68.

[69] Wolsey L.A. 1975, *Faces of Linear Inequalities in 0-1 variables*, Mathematical Programming 8, 165-178.

[70] Wolsey L.A. 1976, *Facets and Strong Valid Inequalities for Integer Programs*, Operations Research 24, 367-372.

[71] Wolsey L.A. 1977, *Valid Inequalities and Superadditivity for 0-1 Integer Programs*, Mathematics of Operations Research 2, 66-77.

[72] Wolsey L.A. 1989, *Submodularity and Valid Inequalities in Capacitated Fixed Charge Networks*. Operations Research Letters 8, 119-124.

[73] Xpress-MP 1999, *Xpress-MP Integrated into MIMI*, Modeling and Optimization Software, Version 12, Dash Optimization Inc., New York, NY.

[74] Zemel E. 1978, *Lifting the Facets of 0-1 Polytopes*, Mathematical Programming 15, 268-277.